

Pravděpodobnostní metody

1 Úvod

1.1 Zákl. definice

Definice (Jevy)

Pro diskrétní pozorování: Ω – lib. konečná nebo spočetná množ. – *pravděpodobnostní prostor*,
 $\omega_i \in \Omega$ – *elementární jevy*
 $A, B, \dots \subseteq \Omega$ – *jevy*, odp. nějakým reálným otázkám pokusu

Definice (Pravděpodobnostní prostor)

Pravděpodobnostní prostor – (Ω, \mathcal{A}, P) , kde \mathcal{A} je mn. spočetných sjednocení a průniků jevů a P zobrazení:
 $P(A) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, t.ž. $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$ pro $A_i \cap A_j = \emptyset$, pro nedisjunktní používám PIE.

Definice (Podmíněná pravděpodobnost)

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, pokud $P(B) \neq 0$. Zmenším si tak soubor výsledků, zjednoduším úlohu.

Definice (Nezávislost jevů)

V prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) jsou A a B nezávislé, pokud $P(A|B) = P(A)$, tj. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ – A nastane se stejnou pravděpodobností, ať už B nastalo, nebo ne.

A_1, \dots, A_n jsou *sdrúženě nezávislé*, pokud $\forall i_1, \dots, i_k$ ($k = 2, \dots, n$) platí $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$, tj. jakákoliv podmnožina je nezávislá.

Definice (Úplná pravděpodobnost)

Uvažujeme dělení prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) na „mřížku“, tj. $\Omega := \cup_{i=1}^n H_i$, kde $H_i \cap H_j = \emptyset$ ($i \neq j$); pak H_i je *úplný systém jevů*. H_i jsou disjunktní, ale nemusí být nezávislé. Potom platí:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\cup_i H_i)) = \sum_i P(A \cap H_i) = \sum_i P(A|H_i)P(H_i)$$

Věta (Bayesova věta)

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_j P(A|H_j)P(H_j)}$$

Definice (Náhodná veličina)

je zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ (kde \mathcal{B}_1 značí borellovské množiny), náhodná funkce. Zjednodušuje počítání, konstrukce prostoru pravděpodobnosti může v někt. případech dělat potíže.

1.2 Rozdělení

Definice (Rovnoměrné)

$P(X = i) = \frac{1}{n} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ – žádná z možností není pravděpodobnější než ostatní.

Definice (Poissonovo(λ))

$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pro $k = 0, 1, \dots$ – docela umělé, ale občas se objevuje jako limitní rozdělení, faktoriál rychle dotlačí pravděpodobnosti k 0 – „rozdělení řídkých jevů“.

Definice (Binomické rozdělení(p, n))

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ – např. opakované tahání kuliček z osudí s vracením – součet nezávislých jevů z alt. rozdělení.

Definice (*Hypergeometrické rozdělení*(N, M, n))

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \text{tahání bez vracení, tj. jevy jsou závislé.}$$

Definice (*Zobecněné binomické*)

$$P(n_0 = 0, n_1 = 1, \dots, n_k = k) = \frac{n!}{n_0! n_1! \dots n_k!} p_0^{n_0} \dots p_k^{n_k} - \text{provádím nezávislých } n \text{ pokusů, které mohou dopadnout s hodnotou v rozmezí } \{0, \dots, k\}. \text{ Zobecnění na vícerozměrné, tj. vektor.}$$

Definice (*Geometrické rozdělení, negativně binomické rozdělení*)

- *geometrické* - $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ - čekání na 1. zdar pro alternativní rozdělení.

- *negativně binomické* - $P(X = r) = \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} p^r$ - zobecnění, r -tý zdar v n pokusech pro alt. rozdělení.

1.3 Vlastnosti rozdělení

Definice (*Distribuční funkce*)

je funkce $F(x) : F(x) = P(X \leq x)$ por nějakou náh. veličinu x . Platí: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, funkce je neklesající a zprava spojitá. V diskrétním rozdělení lze definovat tabulku.

Definice (*Vytvořující funkce*)

$A(x) = \sum_i p_i x^i$ - má jednoznačný vztah k distribuční funkci, ve spojitém případě je to její integrál, v diskrétním platí, že znám-li p_i (např. při zadání distribuční funkce tabulkou), pak znám i vytv. funkci a naopak: $\frac{A^{(n)}(0)}{n!} = p_i$.

Definice (*Střední hodnota*)

$EX = \sum_i x_i p_i = \sum_{\omega} X(\omega) P(\omega)$ - vážený průměr hodnot, z hlediska 1 opakování testu ale nic neříká.

- platí $E(a + bX + cY) = a + bEX + cEY$ a to i když X, Y jsou závislé

Definice (*Kovariance, korelace*)

- *kovariance* - $\mathbf{cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$ (a pro lineárně nezávislé jevy je nulová)

- *korelace* - popis lin. závislosti X, Y : $\mathbf{cor}(X, Y) = \frac{\mathbf{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{var}(X)}\sqrt{\mathbf{var}(Y)}}$

Definice (*Rozptyl*)

$\mathbf{var}(X) = E(X - EX)^2$ - doplnění o další informaci, stř. hodnota čtverce odchylky od stř. hodnoty

- platí $\mathbf{var}(a + bX) = b^2 \mathbf{var}(X)$

- odmocnina z rozptylu je *směrodatná odchylka*

- platí $\mathbf{var}(a + bX + cY) = b^2 \mathbf{var}(X) + c^2 \mathbf{var}(Y) + 2bc \cdot \mathbf{cov}(X, Y)$

Poznámka (*Rozdělení součtů*)

Přesný výpočet - pomocí konvolucí: $P(X + Y = i) = P(X = j \& Y = i - j) = \sum_{j=0}^i P(X = j)P(Y = i - j)$

Pomocí vytvořujících funkcí - X odp. $A(X)$, Y odp. $B(X)$ nezávislé, pak $(X + Y)$ odpovídá vytv. funkce $A(x)B(x)$ (pro důkaz stačí porovnat koeficienty u jednotlivých x^n , indukci platí i pro součty více veličin).

Poznámka (*Náhodný součet náhodných veličin*)

Tj. mám-li náhodný počet náh. (stejně rozdělených) veličin, chci jejich součet ($S_N = X_1 + \dots + X_N$) - vytvořující funkce vyjde $B(A(x))$ (přes $P(S_N = k)$ odpovídá k -tému členu n -té konvoluce nez. vel. X_i). Z toho $ES_N = EX \cdot EN$.

Příklady použití - přežití hadích vajíček ($X_i \sim \text{Alt}(p)$, $N \sim \text{Po}(X)$), n -tá generace / štěpění jader - $P(P(x))$ je druhá generace.

1.4 Věty

Věta (*Čebyševova nerovnost*)

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{var}(X)}{\varepsilon^2}$$

- plyne z ní „konvergence v pravděpodobnosti“, tj. $\bar{X}_n \rightarrow (p)\mu$ (při opakování pokusů a průměrování výsledku se nemění stř. hodnota, ale rozptyl klesá s $\frac{1}{n}$)

Věta (Markovova nerovnost)

$$P(|X - EX|^2 \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|^2}{\varepsilon^2}$$

Věta (Centrální limitní věta)

Platí pro $X_1, X_2 \dots$ nezávislé a stejně rozdělené, $EX_i = \mu$, $\mathbf{var}(X_i) = \sigma^2$ (konečný rozptyl!). Potom:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Tedy rozdělení součtu nezávislých stejně rozdělených náh. veličin mohou aproximovat Gaussovým rozdělením. Aproximace je dobrá už od $n = 20$, pro binom. rozdělení od $n = 50$, $p \in [0.1, 0.9]$.

2 Rekurentní jevy

Motivace

Mějme náh. veličinu, nabývající hodnot $-1, +1$ s pravděpodobnostmi $p, 1 - p$. V tomhle případě chceme simulovat součet n hodnot S_n (např. stav konta po prohrách/výhrách). To nabývá hodnot po celém \mathbb{Z} . Chceme zjistit, kdy se dostaneme zpět na 0, jednotlivé hodnoty jsou závislé – S_n přímo závisí na S_{n-1} .

Definice (Rekurentní jev)

Mějme náhodný pokus, s postupnými výsledky E_0, E_1, \dots (stav konta) dodanými pomocnými pokusy E_{j0}, E_{j1}, \dots (např. přičítání $+1, -1$). Řekneme, že jev ξ nastal v n -tém pokusu (jev ξ je nad E_0, E_1, \dots , tj. např. stav konta se vrátil na 0 po n -tém pokusu), pokud nastal na konci posloupnosti $\{E_{j1}, E_{j2}, \dots, E_{jn}\}$. Řeknu, že jev ξ nastal v m -tém a $n + m$ -tém pokusu, pokud nastal na konci posloupnosti $\{E_{j1}, E_{j2}, \dots, E_{jm}\}$ a $\{E_{j(m+1)}, E_{j(m+2)}, \dots, E_{j(m+n)}\}$.

Pokud pro takový jev platí $P(E_{j1}, \dots, E_{j(m+n)}) = P(E_{j1}, \dots, E_{jm}) \cdot P(E_{j(m+1)}, \dots, E_{j(m+n)})$, nazveme ho *rekurentní jev*. Neříkám tu nic o závislosti bezprostředně po sobě jdoucích výsledků.

Definice (Pravděpodobnosti nastání)

Označím pravděpodobnosti

1. $u_n = P(\xi \text{ nastal v kroku } n)$, vytvořující funkce $U(x)$
2. $f_n = P(\xi \text{ nastal v kroku } n \text{ PO PRVÉ})$, funkce $F(x)$
3. $f_n^r = P(\xi \text{ nastal v kroku } n \text{ PO } r\text{-TÉ})$

Poznámka (Vztah u_n a f_n)

Když jev ξ nastal v kroku n , tak někdy musel nastat poprvé. Pokud to bylo v k -tém kroku, pak lze uvažovat, že ξ nastal na konci posloupnosti délky $n - k$. Podle věty o úplné pravděpodobnosti platí pro každé $n \geq 1$:

$$u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \dots + f_n u_0$$

Takže dostávám konvoluci bez 1 členu, dodefinuji $u_0 = 1, f_0 = 0$ (potom f_n tvoří rozdělení pravděpodobnosti, ale u_n ne).

Věta (Vztah vytv. funkcí rek. jevů)

Platí: $U(x) = \frac{1}{1-F(x)}$.

Důkaz

Z předch. výpočtů dostanu rovnice tvaru $u_n = f_0 u_n + f_1 u_{n-1} + \dots + f_n u_0$ (pro každé $n > 0$, pro $n = 0$ neplatí!), vynásobím je x^n a sečtu po sloupcích, takže dostanu $U(x) = u_0 x^0 + U(x)F(x)$.

Věta (Vytv. funkce pro r -tý návrat)

Pro rekurentní jevy spočteme vytv. funkci r -tých návratů jako r -tou mocninou vytv. funkce prvních návratů.

Důkaz

Pro $r = 2$ podobně jako v předchozí větě, uvažuju jenom, že $f_n^2 = f_0 f_n + f_1 f_{n-1} + \dots + f_n f_0$, tj. dostávám úplnou konvoluci pro každé $n \geq 0$, z ní podobně vynásobením rovnic x^n a sečtením po sloupcích dostávám výsledek. Pro r vyšší než 2 plyne zjevně indukci.

Poznámka

Chová se podobně jako součet nezávislých náhodných veličin – jde vlastně o nezávislé náhodné veličiny T_1, T_2, \dots , které představují *doby mezi návraty* jevu. Po nastání jevu se jede „odznova“, zapomínám předchozí pokusy, tj. veličiny jsou nezávislé. Proto se doba čekání na n -tý výskyt jevu ξ dá popsat náh. veličinou $T_1 + T_2 + \dots + T_n$, kde T_i jsou nezávislé, stejně rozdělené a popisují dobu do prvního výskytu jevu.

3 Markovovy řetězce

Přechod z rekurentních jevů, změna značení: $f_i \rightarrow f_{ii}$, $u_i \rightarrow p_{ii}$.

3.1 Definice

Definice (*Markovův řetězec s diskretním časem a množinou stavů S*)

Je dána posloupnost náh. veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s celočíselnými hodnotami a stavový prostor $S \subseteq \mathbb{Z}$, definovaný předpisem $i \in S \equiv \exists n \in \mathbb{N} : P(X_n = i) \geq 0$. Potom posloupnost $\{X_n\}$ nazveme *Markovův řetězec*, pokud splňuje „Markovovu vlastnost“:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

přičemž musí platit $\forall i, j, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S : P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$.

Definice (*Pravděpodobnost přechodu*)

Označíme $P_{ij}(n, m+n) := P(X_{m+n} = j | X_n = i)$, $P_{ij}(n) := P(X_{n+1} = j | X_n = i)$.

Definice (*Pravděpodobnost a stř. hodnota podmíněná stavem*)

Označíme $P_j(\cdot) = P(\cdot | X_0 = j)$, kde \cdot znamená libovolný jev, tj. pravděpodobnost nastání mého jevu, za podmínky, že se nacházím ve stavu j .

Označíme $E_j(\cdot) = E(\cdot | X_0 = j)$ střední hodnotu nějakého jevu za předpokladu, že vycházím ze stavu j .

Definice (*Homogenní Markovův řetězec*)

Nezávisí-li $P_{ij}(n, m+n)$, potažmo $P_{ij}(n) := p_{ij}$ na n , nazývá se řetězec *homogenní*.

Poznámka

Průchod počátečním stavem v Markovově řetězci je rekurentní jev. Průchod nějakým jiným stavem je rekurentní jev *se zpožděním*, způsobeným nutností poprvé dosáhnout onoho stavu z počátečního. Markovův řetězec lze reprezentovat maticí $\mathcal{P} = (p_{ij})$ spolu s „rozdělením počátečních pravděpodobností“ (udáním počátečního stavu) $a = \{a_i\}$.

3.2 Klasifikace stavů

Definice (*Čas návratu*)

Označíme minimální čas návratu do stavu j – $\tau_j(1) = \inf\{n > 0, n \in \mathbb{N}, X_n = j\}$ (s $\inf\{\emptyset\} = \infty$) jako *čas prvního návratu*. k -tý návrat definujeme rekurentně $\tau_j(k+1) = \inf\{n > \tau_j(k) : X_n = j\}$ a 0-tý návrat $\tau_j(0) = 0$.

Definuji:

1. $P_i(\tau_j(1) = n) := f_{ij}^{(n)}$, $f_{ij}^{(0)} = 0$ (pravděpodobnost prvního přechodu z i do j v čase n)
2. $P_i(\tau_j(1) < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} := f_{ij}$ (pravd. vůbec nějakého přechodu z i do j)

Definice (Trvalý a přechodný stav)

Řeknu, že stav j je:

1. *trvalý*, když $f_{jj} = 1$ (v konečném čase se do něj jistě vrátím)
2. *přechodný*, když $f_{jj} < 1$ (existuje možnost, že čas návratu je nekonečný)

Definice (Nulový a nenulový stav)

Řeknu, že trvalý stav j je:

1. *nenulový*, když $\mu_j := E_j \tau_j(1) < +\infty$ (tj. stř. hodnota času 1. návratu je konečná)
2. *nulový*, když $\mu_j = \infty$

Poznámka (O konvolucích v homogenních mark. řetězcích)

1. $p_{jj}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$ ($n \geq 1$) (pravd. nějakého návratu = 1. návrat + zbytek)
2. $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$ ($n \geq 0, i \neq j$) (1. přechod do cíl. stavu + zbytek)

Věta (O trvalém stavu)

Stav v homogením M. ř. je trvalý, právě když $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ (pravděpodobnosti návratu pro čas jdoucí k nekonečnu jdou k 1, tj. sčítám řadu jedniček).

Podobně lze definovat, že stav je přechodný, když tato suma konverguje.

Poznámka

Do trvalého stavu vstoupí nějaká nekonečná markovovská posloupnost stavů nekonečně mnohokrát s pravděpodobností 1. Stav je přechodný, když počet vstupů do něj v takové posloupnosti je konečný s pravděpodobností 1.

Definice (Periodický a neperiodický stav)

Nechť d_j je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) takových, že $p_{jj}^{(n)} > 0$. Potom

1. jestliže $d_j = 1$, řekneme, že j je *neperiodický* stav,
2. jestliže $d_j > 1$, řekneme, že j je *periodický* stav.

Poznámka (Zjišťování stavů na základě konvergence $p_{ij}^{(n)}$)

V případě, že je stav j přechodný nebo trvalý a nulový, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \forall i \in S$. Jen je-li stav j trvalý a nenulový, je tato limita pro nějaké i nenulová.

Příklady

1. Symetrická náh. procházka po přímce – začínám z 0, s pravd. 1/2 jdu doleva a s 1/2 doprava z každého stavu. Pak je stav 0 trvalý, nulový a periodický s periodou 2.
2. Nesymetrická procházka – doleva jdu s pravd. q , doprava s p . Pak stav 0 je přechodný! Používá se v generátorech náh. čísel.

3.3 Stacionární rozdělení

Definice (Rozložitelný homogenní Markovův řetězec)

Stav E_j je *dosažitelný* ze stavu E_i , když existuje n (čas) takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Markovův řetězec je *nerozložitelný*, jestliže všechny stavy jsou navzájem dosažitelné.

Věta (*O rozložitelném řetězci*)

Máme-li homogenní M. řetězec s konečně mnoha stavy, potom je rozložitelný, právě když matice přechodu se dá vyjádřit jako

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \emptyset \\ A & B \end{pmatrix}$$

po případných (simultánních!) permutacích sloupců a řádků, a P_1 a B jsou čtvercové.

Věta (*O dosažitelnosti a typu stavu*)

1. Je-li stav j dosažitelný z i a opačně, pak i a j jsou stejného typu (stejná nulovost a periodicitá ??).
2. Je-li j stav trvalý a k z něj dosažitelný, pak k je trvalý a zároveň j je dosažitelný z k (protože se do j a z něj zas do k určitě v konečném čase vrátím).

Důsledek

V konečném homogenním Markovově řetězci nemůžou všechny stavy být přechodné a neexistují nulové stavy. Po určité době pohyb v homogenním konečném M. řetězci dospěje do něčeho, čemu říkáme *stacionární rozdělení*.

Definice (*Stacionární pravděpodobnostní rozdělení*)

Mějme homogenní Markovův řetězec $\{X_n\}$, množinu stavů S a matici pravděpodobností přechodů \mathcal{P} . Pak je-li $\Pi = \{\pi_j, j \in S\}$ nějaké pravděpodobnostní rozdělení na S (tj. $\pi_j \geq 0 \forall j \in S, \sum_{j \in S} \pi_j = 1$), nazveme ho *stacionárním rozdělením*, platí-li $\Pi^T = \Pi^T P$ (tj. zachovává pro jednotku času rozložení „částic“).

Poznámka

Pro homogenní M. ř. se stacionárním (počátečním) rozdělením platí $P_1(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P_k(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \forall k, \forall i_j, j = 1 \dots k$

Věta (*Vlastnosti nerozložitelného homogenního řetězce*)

Nerozložitelný homogenní M. řetězec:

1. má-li všechny stavy přechodné nebo trvale nulové, pak v něm stacionární rozdělení neexistuje
 2. má-li všechny stavy trvale nenulové, pak v něm existuje *právě jedno* stacionární rozdělení.
 - Jsou-li stavy neperiodické, potom navíc platí $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \Pi_j (> 0), i, j \in S$
a $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \Pi_j (> 0), j \in S$
 - jsou-li stavy periodické, pak platí (Cauchyovsky) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{ij}^{(k)} = \Pi_j (> 0), i, j \in S$
a $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{jj}^{(k)} = \Pi_j (> 0), j \in S$
- tj. stacionární rozdělení je limitní, existuje-li.

Pro konečný počet stavů nastává určitě varianta 2.

Příklady

- Markovův řetězec daný maticí

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

kde $p + q = 1, 0 < p < 1$. Je nerozložitelný, hledám stacionární rozdělení, najdu z $(\Pi_1, \Pi_2 \dots) = (\Pi_1, \Pi_2 \dots) \cdot P$ pomocí rozepsání na nekonečno rovnic, vyjde (z rekurentního vztahu $\Pi_j = q\Pi_{j-1} + p\Pi_{j+1}$) vzorec $\Pi_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j \Pi_0 (j \in \mathbb{N}_0)$, potom z nerozložitelnosti jsou stavy nenulové a trvalé; pokud $\sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j$ konverguje, stacionární řešení existuje.

- Někjaký automat s posouváním konečné pásky délky n s pravidly $1 \rightarrow 0, L$ a $0 \rightarrow 1, R$ a $* \rightarrow 1, R$ (kde $*$ je jen na začátku a na konci), na počátku mám na pásce nějaké náh. číslo, kde prvních m ($0 \leq m \leq n$) jsou jedničky – mám „useknuté“ geometricky rozdělenou náh. veličinu. Hledání první jedničky se dá popsat M. ř. s konečně mnoha stavy.
- Mám N kuliček ve dvou pikslách A a B . V každém kroku náhodně vyberu jednu kuličku a z té piksly, ve které je, jí přesunu do druhé. Tohle se dá simulovat Markovovým řetězcem – stav systému popíšu jako počet kuliček v piksle A .

Potom ze stavu E_n , kdy v A je n kuliček, jdu s pravděpodobností $\frac{n}{N}$ do stavu E_{n-1} a s $\frac{N-n}{N}$ do stavu E_{n+1} . Z toho si můžu udělat matici P a pak hledat Π tak, že $\Pi^T = \Pi^T P$ (nebo $P^T \Pi = \Pi$).

To se dělá tak, že pro každý stav E_n si napíšu rovnici $\pi_n = \frac{N-(n-1)}{N}\pi_{n-1} + \frac{n+1}{N}\pi_{n+1}$. (V té matici se podívám na příslušný sloupec – jde o součet toho, s jakou pravděpodobností se z jakého stavu dostanu do E_i . Když se na to podíváte, tady to platí i pro krajní stavy, kdy jeden z těch členů je prostě nulový.) Z toho můžu vyjádřit rekurentní vztah (protože $\pi_0 = \frac{1}{N}\pi_1$ a takhle se dá dosazovat dál a dál a dál), vyjde $\pi_n = \frac{n}{N}\pi_n + \frac{n+1}{N}\pi_{n+1}$ a z toho dostanu $\pi_{n+1} = \frac{N-n}{n+1}\pi_n$.

Z rekurentního vztahu jde pomocí π_0 vyjádřit úplně všechny členy, díky kouzlům s násobením pak vychází, že $\pi_n = \binom{N}{n}\pi_0$. Abych dostal platné pravděpodobnostní rozdělení, součet všech pravděpodobností všech stavů musí dávat jedničku, tj. $\sum_{i=1}^N \binom{N}{i}\pi_0 = 1$. Z binomické věty vyjde, že $2^N \pi_0 = 1$ a tedy $\pi_0 = \frac{1}{2^N}$, a tak dostanu celé rozdělení.

4 Fronty

4.1 Exponenciální rozdělení

Poznámka (Vztah Exp a Ge)

Mezi exponenciálním a geometrickým rozdělením je oboustranný vztah:

- $Exp(\lambda) \sim Ge(1 - e^{-\lambda})$
- $Ge(p) \sim Exp(-\log(1 - p))$

Dá se to použít na generování náh. čísel z geom. rozdělení.

Důkaz

Pro $Exp(\lambda)$ je hustota pravd. $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, z toho $F(i) = 1 - \lambda e^{-\lambda i}$ a potom $F(i+1) - F(i) = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^i = pq^i$.

Poznámka (Vlastnosti Exp)

„Nezáleží na tom, kolik už výrobek přežil, ptám-li se na jeho další přežití – Exp nemá paměť.“

$$P(X > x + y | X > x) = e^{-\lambda(x+y)} / e^{-\lambda x} = P(X > y)$$

V realitě je to trochu moc pesimistické, ale dobře se s tím počítá.

Definice (Intenzita poruch)

Jde o pravděpodobnost okamžitého selhání:

$$P(x < X < x + \delta | X > x) = \frac{P(x \leq X \leq x + \delta | X > x)}{P(X > x)} = \frac{\delta \cdot \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}}{1 - F(x)} \approx \delta \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

a právě $f(x)/1 - F(x)$ je *intenzita poruch*.

Poznámka

Intenzita poruch exponenciálního rozdělení je konstantní – λ a exponenciální je jediné spojité rozdělení, které má tuto vlastnost. Podobně geometrické rozdělení je jediné diskrétní rozdělení s konstantní intenzitou poruch.

4.2 Modely zrodu a zániku

Definice (Model zrodu a zániku)

Mějme nějaký systém s konečně nebo spočetně mnoha stavy E_i , kde je možné se v 1 kroku (v intervalu délky h) buď posunout k sousedním, nebo zůstat ve stejném:

$$E_i \rightarrow \begin{cases} E_{i+1} & \lambda_i h + o(h) \\ E_i & 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) \\ E_{i-1} & \mu_i h + o(h) \\ E_{i+k} \ (k \in \mathbb{Z}) & o(h) \end{cases}$$

kde $o(h)$ je libovolně malý člen vzhledem k h ($\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$). $\lambda_i h, \mu_i h$ ukazuje, že doby mezi událostmi se řídí exp. rozdělením.

Označme $P_n(t)$ pravděpodobnost, že v čase t je systém ve stavu E_n . Zajímá nás $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) := p_n$, tj. pravděpodobnosti obsazení systému po té, co se stabilizoval.

X_i, Y_i označíme nějaké náh. veličiny – doby mezi přechody do vyššího, resp. nižšího stavu.

Algoritmus (Výpočet obsazení modelu)

Chci zjistit $P_n(t+h)$ pro nějaké malé h (tj. pravd., že v čase $t+h$ budu ve stavu n). Potom

$$P_n(t+h) = \underbrace{P_n(t)(1 - \lambda_n h - \mu_n h + o(h))}_{\text{v čase } t \text{ jsem byl v } P_n} + \underbrace{P_{n+1}(t)(\mu_{n+1} h + o(h))}_{\text{příchod z } P_{n+1}} + \underbrace{P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} h + o(h))}_{\text{příchod z } P_{n-1}} + o(h)_{\text{přechod o víc}}$$

Z toho získám pro $n \geq 1$ (vydělím h a zahodím $\frac{o(h)}{h}$)

$$P'_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t)$$

Pro E_0 dostanu rovnici

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

Z toho mám soustavu dif. rovnic, vezmu nějaké poč. podmínky ($P_i(0) = 1, P_j(0) = 0, j \neq i$, tj. začátek ve stavu E_i) a spočítám. Limity v $\infty - p_n$ – dostanu položením levé strany rovnice (derivací) rovné nule a nahrazením $P_n(t)$ přímo p_n .

Poznámka

1. Model lze charakterizovat jak počty událostí za daný časový úsek (očekávané λT pro délku T), tak dobami mezi příchody požadavků – tj. je vidět, že mezi těmito věcmi ($Po(\lambda)$ a $Exp(\lambda)$) je nějaký vztah, že jsou převoditelná (viz dále).
2. Více strojů se stejnou intenzitou lze „sesypat“ do jednoho, nezáleží na začátku práce strojů (exp. rozdělení nemá paměť).

Definice (Lineární model zrodu a zániku)

Mám n jedinců, v čase $[t, t+h)$ každý z nich může umřít (s pravd. μ) nebo se rozdělit na 2 (s pravd. λ).

- Zvýšení počtu: binomické rozdělení – vyberu 1 děličiho se, ostatní se nedělí

$$\binom{n}{1}(\lambda h + o(h))(1 - \lambda h - \mu h + o(h))^{n-1} = \dots \approx n\lambda h + o(h)$$

- Snížení: podobně, vyjde $n\mu h + o(h)$.

Označím $F(t, s) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) s^n$ – vytvořující funkce $P_n(t)$ pro nějaký pevný čas t .

Věta (*O vytvořující funkci lineárního modelu*)

Pro případ lineárního modelu zrodu a zániku má $F(t, s)$ tvar

$$F(t, s) = \frac{\mu(1 - e^{(\lambda-\mu)t}) - (\lambda - \mu e^{\lambda-\mu)t}s}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda(1 - e^{(\lambda-\mu)t})s}$$

protože řešení diferenciálních rovnic dává

$$P_n(t) = (1 - A(t))(1 - B(t))(B(t))^{n-1} \quad n \geq 1$$

$$P_0(t) = A(t)$$

kde

$$A(t) = \frac{\mu(e^{\lambda-\mu} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \quad \text{a} \quad B(t) = \frac{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}$$

Model (*M1 - Neomezená ústředna*)

Mějme tel. ústřednu s neomezeně mnoho linkami, potom $\mu_n = n\mu$ (intenzita ukončení hovoru) a $\lambda_n = \lambda$ (intenzita navázání hovoru) – z exp. rozdělení. Narozdíl od předch. případu nezávisí příchozí hovory na počtu probíhajících. Dosadím do obecných rovnic moje μ_n a λ_n a dostanu limitní pravděpodobnosti $p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0$ atd., obecně

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

což odpovídá Poissonovu rozdělení. Najdu p_0 , tak aby $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$; z Taylora $p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = p_0 e^{\lambda/\mu}$, takže $p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$ a hledané řešení je $Po\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$.

Model (*M2 - Dvojbudka s neomezenou frontou*)

Příchod zákazníka – intenzita λ , obsluha – intenzita μ , stav – počet obsluhovaných + počet ve frontě. Potom $\lambda_n = \lambda$

$$\text{a } \mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1. \\ 2\mu & n \geq 2 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0 \quad p_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\mu^2}p_0 \quad p_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \quad p_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

Dostanu nějaké Ge . Aby se netvořila nekonečně dlouhá fronta, je nutné zachovat podmínku $\mu > \lambda$.

Model (*M3 - Parkoviště bez fronty / konečná ústředna*)

N míst, 1 vjezd a 1 výjezd, nesmí se tvořit fronta. Potom

- $\lambda_n = \lambda$ (v krátké době projede jen 1 auto),
- $\mu_n = n\mu h + o(h)$ (vyberu 1 auto a nechám ho odjet $\sim Bi(n, \mu h + o(h))$)

Rovnice pak vyjdou takhle, konkrétní řešení pro $P_n(t)$ máme dosazením do obecného vztahu pro dif. rovnice:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$P_n'(t) = -(\lambda + n\mu)P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad 1 \leq n < N$$

$$P_N'(t) = -N\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t) \quad \text{nemůže vzniknout odjezdem auta}$$

Limitní rozdělení dostaneme položením derivací nule a vyřešením soustavy za podmínky $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ (aby šlo o platné rozdělení pravděpodobnosti), z rekurzivních vztahů vyjde $UPo\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ (useknuté Poissonovo rozdělení – Poissonovo s normalizační konstantou „přerozdělením chvostu“, useknutí se ale v praxi často zanedbává):

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0 \quad p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \quad n = 1, \dots, N \quad p_n = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}}$$

Model (M2a – Budka s omezenou frontou)

Intenzita příchodů a odchodů je konstantní ($\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = m$), tohle platí pro 1 budku, bylo-li by jich víc, měl bych podobný, ale složitější výpočet. Dostávám pak rekurentní rovnici $p_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n p_0$, podle které vidím, že jde o $UGe(\frac{\lambda}{\mu})$ ($p_n = \frac{\lambda}{\mu} \cdot$ „něco“). Z té rovnice pak (podle vzorce pro součet prvních $N + 1$ členů geometrické posloupnosti) vyjde:

$$\sum_{i=0}^N p_i = \sum_{i=0}^N \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1} - 1}{\frac{\lambda}{\mu} - 1}$$

A tento součet musí být roven jedné, aby šlo o korektní rozdělení pravděpodobnosti, takže celkově dostávám:

$$p_0 = \frac{\mu^N (\lambda - \mu)}{\lambda^{N+1} - \mu^{N+1}}$$

Model (M4 – 1 opravář na M strojů)

Jde v podstatě o inverzi parkoviště. Mám M strojů, intenzita poruch $\lambda_n = (M - n) \cdot \lambda$ (protože pokud se už n strojů porouchalo, ještě se může porouchat $M - n$) a doba obsluhy (opravy) je $\mu_n = \mu$ (konstantní). Dostávám také UPo , jen s prohozenými parametry $UPo(\frac{\mu}{\lambda})$ a opačným počítáním indexů. Vychází $p_{M-k} = \frac{1}{k!} (\frac{\mu}{\lambda})^k p_M$ a p_M slouží jako normalizační konstanta.

Model (M5 – Líní svářeči)

Mám a svářečů, pokud svářeč nepracuje, začne pracovat s intenzitou λ , při práci s intenzitou μ přestane.

$$\lambda_n = (a - n)\lambda \quad \mu_n = n\mu \quad p_n = \binom{a}{n} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{a-n} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^n$$

Intenzity jdou „proti sobě“, ovlivňují se navzájem. Výsledné rozdělení je binomické.

!Tady chybí ještě model M/M/1 s hodnotami W a L , probíraný na přednášce 18.12!

4.3 Poissonovo rozdělení

Definice (Poissonovo rozdělení („rozdělení řídkých jevů“))

Náh. veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem κ , jestliže $P(X = n) = e^{-\kappa} \frac{\kappa^n}{n!}$ pro $n = 0, 1, \dots$. Vytvořující funkce (z Taylora) $A(x) = e^{-\kappa} e^{\kappa x}$, stř. hodnota κ a rozptyl taky κ (z derivací vytv. funkce).

Poznámka (Součet Poissonových rozdělení)

Mám-li 2 veličiny X, Y a $X \sim Po(\kappa_1)$, $Y \sim Po(\kappa_2)$ a jsou nezávislé, pak platí $X + Y \sim Po(\kappa_1 + \kappa_2)$ (ze součinu vytvořujících funkcí).

Poznámka (Aproximace binomického rozdělení normálním)

Binomické rozdělení lze podle centrální limitní věty aproximovat rozdělením $No(np, np(1-p))$, nejde ale dělat vždy (potřebuji pevné p).

Poznámka (Aproximace binomického rozdělení Poissonovým)

Mám $Bi(n, p)$ jako součet S_n nezávislých $X_1 + \dots + X_n$ z $Alt(p)$. Pokud $p \rightarrow 0$ a $n \rightarrow \infty$ (hodnota p není pevná, záleží na n , platí $np_n \rightarrow \kappa$), lze aproximovat (kam se podělo $(n-k)!$??):

$$p_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} = np(n-1)p \dots (n-k+1)p \cdot \frac{1}{k!} (1-p)^{n-k} \approx \kappa^k (1 - \frac{\kappa}{n})^{n-k} \approx \kappa^k \frac{e^{-\kappa}}{k!}$$

4.4 Poissonův proces

Definice (Poissonův proces)

Pro nějaké události (proces příchodu) a náh. veličiny X_i (doby mezi příchody) definují *čítací proces* $N(t)$, označující počet událostí v intervalu $[0, t]$. Pak tento čítací proces nazvu (homogenní) *Poissonův proces*, pokud platí:

1. $N(0) = 0$
2. počet událostí v disjunktních čas. úsecích jsou nezávislé náh. veličiny
3. rozdělení počtu událostí v intervalu I závisí pouze na délce tohoto intervalu, nikoliv na hodnotě procesu v čase, kdy I začíná (stacionarita)
4. $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$, $P(N(h) = 2) = o(h)$ – za krátký čas. úsek se stane povětšinou jen 1 událost (podobně jako v předch. modelech)

Věta (Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti, že nenastane žádná událost)

Platí $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$, tj. pravděpodobnost, že se do času t nic nestane, klesá exponenciálně.

Důkaz

Označme $P_0(t) := P(N(t) = 0)$. Pak platí (ze vzorců) $P_0(t+h) = P_0(t)(1 - \lambda h + o(h))$, převedením $P_0(t)$ a vydělením h dostávám dif. rovnici $P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$ a její řešení odpovídá (protože $P_0(0) = 1$).

Věta (Doby mezi událostmi $\sim \text{Exp}(\lambda)$)

Doby mezi událostmi v homogenním Poissonově procesu se řídí exp. rozdělením s parametrem λ .

Důkaz

Vím, že $P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$, takže $P(X_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ – distrib. fce odpovídá exp. rozdělení. Potom pro $P(X_2 > s + t | X_1 = s)$ vychází stejně. S odvoláním na nezávislost dostávám indukci všechny X_i .

Věta (Doba čekání na n -tou událost $\sim \Gamma(n, \lambda)$)

Doba čekání na n -tou událost se řídí gamma-rozdělením s parametry n, λ .

Důkaz

Definujme čas do n -té události jako $S_n = X_1 + \dots + X_n$, z konvolucí vyjde, že hustota pravděpodobnosti náh. veličiny S_n má tvar $g(x, n, \lambda) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1}$, kde $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$, což pro přirozená n dává $\Gamma(n) = (n-1)!$. Výsledná hustota pravděpodobnosti odpovídá gamma-rozdělení:

$$g(x, n, \lambda) = \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Věta (Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti, že nastane n událostí)

Platí $P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, tedy počet událostí v intervalu délky t se řídí $Po(\lambda t)$.

Důkaz

Plyne z $N(t) \geq n \iff S_n \leq t$: $P(N(t) = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = I_n - I_{n+1}$ pro $I_k = \int_0^t \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x} x^{k-1} dx$.

Dokážu, že $I_n = I_{n+1} + \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} - I_{n+1}$ (rozdělím I_n metodou per partes, kde $u = e^{-\lambda x}$ a $v' = x^{n-1}$).

4.4.1 Hledání λ pro naměřené hodnoty

Algoritmus (Nalezení λ)

Mám nějaké naměřené hodnoty $X_1, X_2 \dots X_n$, hledám λ pro exponenciální rozdělení, jímž by se měly řídit (takovou, aby byly hodnoty nejpravděpodobnější).

- Spočtu $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- Pro $\text{Exp}(\lambda)$ platí $EX = \frac{1}{\lambda}$, takže z Čebyševovy nerovnosti ($\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$) dostanu $\lambda \approx \frac{1}{\overline{X}_n}$.

Nalezené $\hat{\lambda}$ dále testuji pomocí testů dobré shody.

Algoritmus (Testování $\hat{\lambda}$ Kolmogorov-Smirnovovým testem)

Situace:

- Hypotéza: mám náhodný výběr z nějaké distr. funkce $F(x)$.
- Alternativa: rozdělení výběru je jiné.

Postup:

1. Odhadnu $F(x)$ pomocí *empirické distr. funkce* $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)$, kde I je indikátorová funkce (pro každé X_i dá 1, pokud je menší než x a 0 jinak). Tato funkce má všechny vlastnosti distribuční funkce a platí věta, že pro $n \rightarrow \infty$ jde $\hat{F}_n(x) \rightarrow F(x)$.
2. Spočtu $KS = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$ a podle toho se rozhoduju.

Problém: rozdělení této naší statistiky je zadané jen tabulkou, nelze parametr odhadovat a hned testovat vůči odhadu (vždy vyjde dobře)! Je nutné náhodně rozdělit data na 2 části, z 1 odhadovat parametr a druhou testovat. Výběr jedné části lze provést např. postupným náh. generováním pořadí prvku, který vyjmu (a meze generování klesají s počtem kandidátů na vybrání).

Algoritmus (Testování $\hat{\lambda}$ pomocí χ^2 -testu (Pearsonova))

Postup:

Máme naměřená data U_1, \dots, U_n , a \mathbb{R} rozdělíme na J intervalů pevné délky. Potom n_i skutečný je počet hodnot v i -tém intervalu a np_i je očekávaný počet (podle testovaného rozdělení pravděpodobnosti). Sledujeme statistiku, která by se měla v případě, že máme správné rozdělení, řídit χ^2 rozdělením s $J - 1$ stupni volnosti:

$$X^2 = \sum_{i=1}^J \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi_{J-1}^2$$

Pro nějakou hodnotu tolerance α správnost rozdělení odmítáme, když $X^2 \geq \chi_{J-1}^2(\alpha)$. Neznáme-li parametr λ z homogenního Poissonova procesu, musíme jej odhadnout a ve srovnávání použít *modifikovanou metodu* χ^2 , kde se snižuje počet stupňů volnosti.

4.4.2 Testování změny λ

Situace

Mám nějaký Poissonův proces, kde se doby příchodů požadavků X_1, \dots, X_n řídí stále $Exp(\lambda)$. Chci zjistit, jestli se v nějakém čas. okamžiku – po nějakém X_m (např. po úpravě stroje) hodnota λ nezměnila (tj. jestli je λ konstantní – *homogenní*). Takže testuji:

- Hypotéza: $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$, tj. λ je konstantní
- Alternativa: existuje m tak, že $X_1, \dots, X_m \sim Exp(\lambda_1)$ a $X_{m+1}, \dots, X_n \sim Exp(\lambda_2)$, tj. λ se změnila

Máme 2 možnosti, jak změnu testovat. Buď OFF-LINE – tj. na konci urč. období zkontroluji, zda se λ nemění – jde o klasické testování hypotéz a odhad (viz výše), nebo ON-LINE – s každým novým pozorováním (nebo každých n pozorování) zkontroluji, zda se něco nemění – sekvenční metody. Výsledky obou přístupů se mohou lišit.

Algoritmus (On-line testování)

Cíle:

1. Běží-li proces požadavků stále s $Exp(\lambda)$, tak nechat běžet co nejdéle
2. Dojde-li ke změně λ , co nejdříve ji odhalit

Použijeme *Stopping rule* (zde podle Shewarty):

$$\tau_s = \inf \left\{ n \mid \log \frac{f_1(X_n)}{f_0(X_n)} > h \right\}$$

kde τ_s značí čas změny a funkce f_0 a f_1 určují podobnost původnímu, resp. změněnému rozdělení. h je potom zvolená hladina, kterou poměr nesmí překročit. Cíle jsou protichůdné, takže zvolím h , abych posloužil prvnímú a

testuji citlivost na druhý. Hodnoty τ_s záleží jen na posledním pozorování, takže vlastně pro každé pozorování zjišťuji, zda $\log \frac{f_1(X_n)}{f_0(X_n)} > h$, což dává booleanovské výsledky, tj. mám novou náhodnou veličinu s alternativním rozdělením. Čekám pak na její první zdar – celkově dostávám geometricky rozdělenou náh. veličinu (s parametrem p – pravděpodobností, že překročím hladinu h).

Důsledek (Shewartovo pravidlo)

1. Zafixuj f_0, f_1 . (podobnost tomu co chci a čemu se bráním)
2. Stanov střední dobu mezi „falešnými poplachy“. (střední hodnota mého geom. rozdělení, volím sám)
3. K této hodnotě najdi h .
4. Pro dané h si spočítej, jak dlouho pro různá μ (parametry odpovídající f_1) bude trvat odhalení změny (citlivost).

Příklad

Vezmeme $f_0 : X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ a $f_1 : X_i \sim \text{Exp}(\mu)$, předpokládejme, že $\mu = k \cdot \lambda$. Potom

$$\log \frac{f_1(X_n)}{f_0(X_n)} = \log \frac{k\lambda e^{-k\lambda X_n}}{\lambda e^{-\lambda X_n}} = \log k + \lambda X_n(1 - k)$$

Ze střední doby mezi poplachy Υ (pro Geom. rozdělení odpovídá $1/p$) vypočítám h :

$$\frac{1}{\Upsilon} = p = P(\log k + \lambda X_n(1 - k) > h) = P(X_n > \frac{h - \log k}{\lambda(1 - k)}) = P(\text{Exp}(\lambda) \leq \frac{h - \log k}{\lambda(1 - k)}) = 1 - e^{-\frac{h - \log k}{1 - k}}$$

Odhalení změny – jde o to, s jakou pravděpodobností $X_n \sim \text{Exp}(\mu)$ překročí moje h :

$$P(X_n \sim \text{Exp}(\mu) > h) = \int_h^\infty \mu e^{-\mu x} dx$$

Poznámka (Simulace Markovovým řetězcem)

Celý Shewartův proces je vlastně Markovův řetězec se 2 stavy – E_0 (v pořádku) a E_1 (chyba, pohlcující stav), kdy s pravd. p se dostanu z E_0 do E_1 . L_0 – očekávaná délka procházky z E_0 do E_1 mi dává střední dobu mezi poplachy.

Poznámka (Zesložitění)

Chci-li brát v úvahu víc pozorování, zavedu „warningový“ stav – např. 2 pozorování z „warning“ za sebou nebo 1 pozorování z „halt“ zastaví stroj. Mám tedy 3 stavy Markovova řetězce a jeden speciální, kam se dostanu po 2. pozorování hodnoty odpovídající „warning“. Z toho pak mohu počítat stř. doby mezi poplachy, Markovovy řetězce jsou nejjednodušší způsob modelování.

Další zesložitění je „stop-lo“, „stop-hi“, „warning-lo“, „warning-hi“ – dostanu ještě víc stavů.