Věta:
Každá hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná (i když je sama komplexní). Navíc existuje unitární matice R taková, že $R^{-1}AR$ je diagonální. (tzn. hermitovská matice je diagonalizovatelná).

Důkaz:
indukcí podle řádu matice:

(1): pro řád 1 platí (musí být 1 reálné číslo - je už diagonální).
(n): ind. krok: důkaz pro A_n; předpokládejme, že pro $1...(n-1)$ platí.

1. Podle zákl. věty algebry ex. vl. číslo λ a přísl. netriviální vl. vektor $x \in \mathbb{C}^n$.

2. Podle Steinitzovy věty o výměně doplním x na ortonormální bázi $x, x_2, \ldots, x_n$ prostoru $\mathbb{C}^n$. (BÚNO předp. že $||x|| = 1$).

3. Z vektorů $x, x_2, \ldots, x_n$ sestavím pomocnou matici P_n řádu n (v 1. sloupci bude x). Protože je nalezená báze ortonormální, jsou každé 2 vektory na sebe kolmé, takže P_n je unitární ($P_n^H P_n = I_n$).

4. Platí: $(P_n^H A_n P_n)^H = P_n^H A_n^H (P_n^H)^H = P_n^H A_n P_n$, tedy matice $P_n^H A_n P_n$ je hermitovská.

5. V matici $A_n P_n$ je první sloupec λ-násobek vektoru x (protože λ je vlastní číslo matice A_n), po vynásobení zleva P_n^H dostávám
$$P_n^H A_n P_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

6. Protože je $(P_n^H A_n P_n)$ hermitovská matice a má λ na diagonále, tak λ musí být rovna svému komplexně sdruženému číslu, tedy $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Podle indukčního předpokladu existuje unitární R_{n-1} taková, že $R_{n-1}^{-1} A_{n-1} R_{n-1} = D_{n-1}$ pro nějakou diagonální matici D_{n-1}. Vezmu $R_n = P_n \cdot S$, kde
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

8. Matice S je unitární a P_n taky, takže R_n je unitární (možno rozepsat součin).

9. Zbývá ověřit, že R_n je hledaná matice:

$$R_n^H A_n R_n = (P_n S)^H A_n P_n S = S^H P_n^H A_n P_n S =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_{n-1}^H & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1}^H & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = D_n$$

Důsledek (interpretace v $\mathbb{R}$):
Pro každou symetrickou matici A platí, že všechna její vl. čísla jsou reálná a navíc existuje ortogonální matice R: $R^{-1}AR$ je diagonální. Příslušný vl. vektor x lze vzít reálný, protože $(A - \lambda I)x = 0 \dots$ soustava lin. rovnic s reálnou singulární maticí $\dots$. musí mít netriviální reálné řešení. Zbytek důkazu stejný, jen místo A^H je A^T.