Analýza

18. června 2005

1 Primitivní funkce

- $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, $F : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{I} = (a, b)$ - F je primitivní k f: $F'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbf{I}$.
- V1: F, G primitivní k f na $\mathbf{I}$ $\Rightarrow$ex. c$\in \mathbf{R}$, t.ž. $F(x) - G(x) = c$ pro $\forall x \in \mathbf{I}$.
- značení - $F(x) \subseteq \int f(x)\mathbf{dx}$ (na $\mathbf{I}$).
- V2: $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ spojitá na $\mathbf{I}$ $\Rightarrow$ f má na $\mathbf{I}$ primitivní funkci
- tabulkové integrály
- V4: $\mathbf{I} \neq \emptyset$, otevřený, $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, f má na $\mathbf{I}$ primitivní fci. Pak pro $\forall$ podinterval $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ je $f(\mathbf{J})$ opět interval. (Darbouxova vlastnost, nabývání mezihodnot)
- V5: (Substituce) $f : (a, b) \to \mathbf{R}$.$F$ primitivní k f. $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$, $\varphi'(x) \in \mathbf{R}$ pro $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Pak $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t))$ na (α, β). Nechť navíc $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a $\varphi' \neq 0$ na (α, β) $(\exists \varphi^{-1})$. Potom $F(t) = \int f(t)\mathrm{d}t = G(\varphi^{-1}(t))$, kde $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.
- V6: (Per Partes) $f, g : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$. F, G jsou prim. funkce k f,g na $\mathbf{I}$. Pak $\int F(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\mathrm{d}x + c$ na $\mathbf{I}$.
- V7: (Zákl. věta algebry) Každý polynom $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbf{C}$ má jednoznačný rozklad $p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbf{C}$.
- důsledky - Nechť $p, q \in \mathcal{C}[x]$(komplexní polynomy), $p(x) = q(x)$ pro nekonečně mnoho $x \in \mathbf{C}$ $\Rightarrow$$p$,$q$ se rovnají jako polynomy, tj. $p(\alpha) = q(\alpha)\, \forall \alpha \in \mathbf{C}$. pozn - sin má ∞ kořenů, polynom $\leq n$; derivování snižuje násobnosti kořenů o 1.
- V8: $\alpha \in \mathbf{C}$, $p(x) \in \mathcal{R}[x]$, α je k-násobný kořen p. Pak $\overline{\alpha} = a - b_i$ (kompl. sdruž.) je také k-násobný kořen $p(x)$.
- důsledek: $p(x)$ má rozklad $p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x - \alpha_r)^{k_r} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x^2 + \beta_s x + \gamma_s)^{l_s}$, kde $k_i, l_i \in \mathbf{N}$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbf{R}$.
- **Racionální funkce:** $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy $\in \mathcal{R}[x]$. $\int R(x)\mathbf{dx}$ =racionální fce + log(polynom) + arctg(lin.polynom).
- V9: (Rozklad na pariciální zlomky) $P, Q \in \mathcal{R}[x]$, $\deg(P) < \deg(Q)$, $Q \neq 0$, Q - rozložený : $Q(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x - \alpha_r)^{k_r} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x^2 + \beta_s x + \gamma_s)^{l_s}$, potom

  $$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{ij}}{(x - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x^2 + \beta_i x - \gamma_i)^j}$$

  kde $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbf{R}$ jsou jednoznačně určené.
- integrace racionální funkce

2 Určitý integrál

- výpočet plochy pod křivkou na intervalu (aproximace). ***dělení intervalu*** $[a, b]$ - $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, $D = (x_0, x_1, ..., x_n)$. $\mathbf{I}_i$ - díl intervalu; $\sup_{\mathbf{I}} f = \sup\{f(x) : x \in \mathbf{I}\}$, $|\mathbf{I}_i| = x_i - x_{i-1}$.
- def. dolní&horní ***riemannovský součet*** - $s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\mathbf{I}_i} \cdot |\mathbf{I}_i|$, podobně sup, ***dolní a horní Riemannův integrál*** - $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s(f, D)\}$(přes všechna D - dělení $[a, b]$) $= \lim_{n\to\infty} s(f, D_n)$, horní symetricky.
- D'= ***zjemnění dělení*** D, když $D \subseteq D'$.

- L1: $\mathbf{I}_0 = [a,b]$, $f(x)$ def. na $\mathbf{I}_0$, D, D' dělení $\mathbf{I}_0$, D' zjemnění D. Potom $s(f,D) \le s(f,D')$a $S(f,D) \ge S(f,D')$. ($\inf_{\mathbf{I}} f \cdot |\mathbf{I}| = \inf_{\mathbf{I}} f \cdot |\mathbf{J}| + \inf_{\mathbf{I}} f \cdot |\mathbf{K}| + \inf_{\mathbf{I}} f \cdot |\mathbf{L}| \le \inf_{\mathbf{J}} f \cdot |\mathbf{J}| + \inf_{\mathbf{K}} f \cdot |\mathbf{K}| + \inf_{\mathbf{L}} f \cdot |\mathbf{L}|$ - kde podintervaly $\mathbf{J} + \mathbf{K} + \mathbf{L} = \mathbf{I}$).
- L2: $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ omezená, D_1, D_2- 2 dělení $[a,b]$. Potom $s(f,D_1) \le S(f,D_2)$. (stejná - triviální. Společné zjemnění, L1).
- důsledek: $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ omezená, D_1, D_2 dělení $[a,b]$, $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$. Potom $m \cdot (b-a) \le s(f,D_1) \le \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le S(f,D_2) \le M(b-a)$.
- Pokud $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$, pak ***Riemannův integrál*** funkce f na intervalu $[a,b]$: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.
- $\mathcal{R}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbf{R}$, omezená, má Riemannův integrál na $[a,b]\}$.
- ***norma dělení*** - $D = (x_0, ..., x_n)$, norma $v(D) = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$.
- V1: $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ omezená, $D_1, D_2, ...$ - dělení $[a,b]$, t.ž. $v(D_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Pak $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s(f,D_n);\, n = 1,2,...\}$, $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf\{S(f,D_n);\, n = 1,2,...\}$. Ukázat $\forall \varepsilon > 0$, $\forall D$ int. $[a,b]\ \exists n_0$, t.ž. $s(f,D_{n_0}) > s(f,D) - \varepsilon$. n_0, aby $v(D_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3K|D|}$ (počet bodů v D, omezení f na $[a,b]$). Vzít $P = D \cup D_{n_0}$, def. množiny intervalů - A(z P), $B(D_{n_0}$, neobs. uvnitř body z D), C(obs. body z D), E(z P, vzniklých podrozdělením D pomocí D_{n_0}); $s(f,D) \le s(f,P) \le \sum_B \inf_I f \cdot |I| + \sum_C (\inf_I f + K)\cdot|I| + \sum_E \inf_I f \cdot |I| ... = s(f,D_{n_0}) + K\sum_{\mathbf{I}\in C}|\mathbf{I}| + \sum_{\mathbf{I}\in E} \inf f\, |\mathbf{I}| \le s(f,D_{n_0}) + 3K|D|v(D_{n_0}) < s(f,D_{n_0}) + \varepsilon$.
- jestliže $\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = A$, pak $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$.
- V2: (kritérium riemanovské integrovatelnosti) - $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ omezená, $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists D$ - dělení intervalu $[a,b]$, t.ž. $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$ - $\Rightarrow$: víme, že $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$. platí věta 1, pro $\varepsilon > 0$ vezmu n_0, t.ž. $|s(f,D_n) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|S(f,D_n) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| < \frac{\varepsilon}{2}$, t.ž. $0 \le S(f,D_n) - s(f,D_n) < \varepsilon$. $\Leftarrow$: Vezmu $\varepsilon > 0$, ex. D, $0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le s(f,D) - s(f,D) \le \varepsilon$, to platí $\forall \varepsilon$.
- $D_1, D_2, ...$ dělení $[a,b]$, t.ž $v(D_n) \to 0$, pak $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je omezená.
- $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ je na $\mathbf{I}$ ***stejnoměrně spojitá*** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$, t.ž. $\forall x, y \in \mathbf{I} : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (u normální spojité fce δ závisí na x), (stejnoměrná spojitost implikuje spojitost, opačně ne).
- V3: (spojitost $\Rightarrow$ stejnoměr. spojitost na kompaktním intervalu) - $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, kde $-\infty < a < b < +\infty$(tj. kompaktní interval). f na $[a,b]$ spojitá $\Rightarrow$ stejnoměrně spojitá. sporem, $\delta := \frac{1}{n}$. ex. $\varepsilon_0 > 0$, t.ž. $\forall n \in \mathbf{N}\, \exists x_n, y_n \in [a,b]$, t.ž. $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, ale $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$, konverg. podposloupnosti indexů $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$, vl. limity α, β; $\alpha = \beta := l$. f spojitá v l, pro $\frac{\varepsilon_0}{3}\ \exists \delta : |z - l| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(l)| < \frac{\varepsilon_0}{3}$. Posl. konvergují k l, proto $\exists k_0$, t.ž. $|x_{n_{k_0}} - l| < \delta$ i $|y_{n_{K_0}} - l| < \delta$, pak $|f(x_{n_{k_0}}) - f(y_{n_{k_0}})| < \frac{2}{3}\varepsilon_0$, spor.
- V4: (spojité fce $\in \mathcal{R}([a,b])$) - $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ (omezená) je spojitá. Pak $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Podle V3 stejnoměrně spojitá, vezmu D, t.ž. $v(D) < \delta$. $S(f,D) - s(f,D) = \sum_{i=1}^n (\sup_{\mathbf{I}_i} f - \inf_{\mathbf{I}_i} f)|\mathbf{I}_i| \le \varepsilon$ (protože $v(D) < \delta$). $S(f,D) - s(f,D) \le \varepsilon \sum_{i=1}^n |\mathbf{I}_i| = \varepsilon \cdot (b-a)$ - z V2.
- V5: (monotonie $\Rightarrow \mathcal{R}([a,b])$) - $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ monotónní $\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$. BÚNO nekl.; V2 , rozdělím $[a,b]$ na $\mathbf{I}_i$ délky $\frac{b-a}{n}$, $S(f,D_n) - s(f,D_n) = \sum_{i=1}^n (\sup_{\mathbf{I}_i} f - \inf_{\mathbf{I}_i} f)\cdot|\mathbf{I}_i| = \sum (f(x_i) - f(x_{i-1}))\cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \to 0$ pro $n \to \infty$- pro dost velké n $< \varepsilon$.
- V6: (vlastnosti Riemannova integrálu):
  1. linearita: $[a,b]$, $f, g \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow (f+g) \in \mathcal{R}([a,b])$ && $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x$. $\alpha \in \mathbf{R}$, $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ &&$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. $\mathbf{I} \subset [a,b]$. $\sup_{\mathbf{I}}(f+g) \le \sup_{\mathbf{I}}(f) + \sup_{\mathbf{I}}(g)$, D dělení - $S(f+g,D) \le S(f,D) + S(g,D)$ (spodní symetricky), V2 - ex. D_1, D_2,t.ž. rozdíl $S - s$ menší než $\frac{\varepsilon}{2}$ pro f i g, spol. zjemnění, $S(f+g,D) - s(f+g,D) \le \varepsilon$- V2. α- násobek podobně (pozor na $\alpha < 0$ - vzít $|\alpha|$.
  2. monotonie: $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $f(x) \le g(x)$ pro $\forall x \in [a,b]$. Potom $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Pak pro $\forall D\, [a,b]$ máme $S(f,D) \le S(g,D) \Rightarrow$platí.
  3. aditivita: $a < b < c$. Pak $f \in \mathcal{R}([a,c]) \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{R}([b,c])$ a $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$. vezmu $\{D_n\}$, t.ž. $v(D_n) \to 0$ a b je vždy dělící bod. Potom $\forall D_n = E_n \cup F_n$ pro $[a,b] \cup [b,c]$. $S(f,D_n) - s(f,D_n) = (S(f,E_n) - s(f,E_n)) + (S(f,F_n) - s(f,F_n))$, $v(E_n), v(F_n)$taky $\to 0$. $S(f,D_n) - s(f,D_n) \le \varepsilon \Rightarrow (S(f,E_n) - s(f,E_n)) + (S(f,F_n) - s(f,F_n)) \le 2\varepsilon$.

- důsledek: integrovatelnost na podintervalech. úmluva: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x - \int_c^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

- V7 (integrál jako fce horní integrační meze). Nechť $f : \mathbf{J} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{J} \neq \emptyset$ je interval, $\forall [a,b] \subset \mathbf{J} : f \in \mathcal{R}([a,b])$, $c \in \mathbf{J}$. Def. $F(x) := \int_c^x f(x)\mathrm{d}x$. Potom (i) F spojitá na $\mathbf{J}$, (ii) je-li x_0 bod spojitosti f, pak $F'(x_0) = f(x_0)$. (i) - $d \in \mathbf{J}$: ukázat $\lim_{x\to d+} F(x) = F(d)$ - $[d, d+\delta] \subset \mathbf{J}$. $F(x) - F(d) = \int_d^x f(t)\mathrm{d}t$ (z úmluvy). $m := inf_{[d,d+\delta]} f, M := sup$; $f \in \mathcal{R} \Rightarrow -\infty < m, M < \infty$. $m(x-d) \le F(x) - F(d) \le M(x-d)$ $(x-d < \delta)$ Pokud $\delta < \frac{\varepsilon}{max\{|m|,|M|\}}$, tak platí. (zleva podobně). (ii) $x_0 \in \mathbf{J}$- vnitř. bod. $\frac{1}{h}((F(x_0+h) - F(x_0)) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$(z úmluvy). $|\frac{1}{h}(F(x_0+h) - F(x_0)) - f(x_0)| = |\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t|$ (int. z konstanty je konst.·délka intervalu). f spojitá v $x_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro $t \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ - z toho $|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t| \le \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon$(prohoz abs. hod. - $\le$) - $\lim_{h\to 0} \frac{(F(x_0+h) - F(x_0))}{h} = f(x_0)$.

- důsledek: $f : \mathbf{J} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{J}$ otevřený. f spojitá na $\mathbf{J}$ - f má na $\mathbf{J}$ prim. fci. Zvolím lib. $c \in \mathbf{J}$, potom $F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$. (V4 - R-integrál existuje; f spoj. na $\mathbf{J}$ - $F'(x) = f(x)$ (toto je vlastně důkaz V1-2).

- Důsledek: $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ spojitá - pro $\forall$ její prim. fci $F(x)$ na $[a,b]$ ex. $\lim_{x\to b-} F(x)$ a $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.Stačí důkaz pro jedinou (ost. - o konstantu) - $F_0(x) := \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$. Lim. v krajních bodech rovny fčním hodnotám. (V7(i)) $F_0(b) - F_0(a) = \int_c^b f(t)\mathrm{d}t - \int_c^a f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Newtonův integrál

- ***Newtonův integrál*** - f má $(N)\int$ přes $[a,b]$, má-li tam prim. fci F a existují-li vlastní lim. v krajních bodech. Potom $(N)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$.

- pro spojité fce - $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, značení : $(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$; ***třída newtonovsky integrovatelných fcí*** $\mathcal{N}([a,b])$.

- množiny $\mathcal{N}([a,b])$ a $\mathcal{R}([a,b])$ jsou neporovnatelné

- V: $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ omezená. $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Leftrightarrow$množina $X = \{x \in [a,b], x$ je bod nespojitosti$\}$ splňuje: $\forall \varepsilon > 0\, \exists$ spočetně mnoho podintervalů $[a,b]$ $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \ldots$ že $X \subset \cup_{j=1}^{\infty} \mathbf{I}_j$a $\sum_{j=1}^{\infty} |\mathbf{I}_j| < \varepsilon$ - splněno pro konečnou i spočetnou X.

- V8: (per partes) f, g, f' g' spojité na $[a,b]$. Pak $\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\mathrm{d}x$. fce spojité $\Rightarrow$ integrály existují, plyne z věty o per partes - 1-6.

- V9: (substituce pro urč. integrál) $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ spojitá. $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ má spojitou derivaci na $[\alpha,\beta]$ potom: (i) $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)} f(x)\mathrm{d}x$. (ii) nechť φ je *na* $[a,b]$ a $\varphi' \neq 0$ na $[\alpha,\beta]$. Pak $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$. fce spojité $\Rightarrow$ integrály ex.; věta o substituci pro primitivní funkci (i) tam, (ii) zpátky.

Aplikace určitého integrálu

- V10: (integrální kritérium pro řady) $a \in \mathbf{N}$, $f : [a-1, \infty) \to \mathbf{R}$. f je ≥ 0, spojitá a nerostoucí. Potom $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $(N)\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$. Tvrzení - $\int_a^{b+1} f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=a}^{b} f(n) \le \int_{a-1}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ $(a \le b,\ a,b \in \mathbf{N})$ - def. $g(x), h(x)$ $(g(x) = \sum_a^b f(n)$, $h(x)$ taky - vždy na int. delky 1: $h(x) \le f(x) \le g(x)$, V6 - platí. Věta: $\Rightarrow$: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=a}^{b} f(n) \le \infty$ pro $\forall n \in \mathbf{N}$, proto $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \infty$, $\Leftarrow$: podobně.

- V11: (Délka křivky v rovině $\mathbf{R}^2$) $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ spojitá, graf fce. Předp., že f má spojitou derivaci na $[a,b]$. Pak $L(f)$ = délka křivky k= $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2}\mathrm{d}x$. $f \in \mathcal{C}([a,b])$, délku křivky definuji pomocí dělení D - $L(f,D) := \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$ (délka lomené čáry). $L(f) := sup_D L(f,D)$.

- V12: $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ spojitá, nezáporná. Těleso $\mathbf{T} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $\sqrt{y^2+z^2} \le f(x)$ pro $x \in [a,b]\}$: objem $\mathrm{vol}(\mathbf{T}) = \pi\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x$, povrch pláště $\mathrm{sfc}(\mathbf{T}) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$ (f' spojitá na $[a,b]$). (bez důkazu)

3 Konvergence posloupností a řad funkcí

- def. ***bodová konvergence*** - $f_n \to f$ na M , pokud $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každý $x \in M$. (nezachovává spojitost, omezenost, ani integrovatelnost)

- ***stejnoměrná konvergence*** - $f_n \rightrightarrows f$ na M, pokud $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 : \forall n \ge n_0, \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ - n_0 závisí jen na ε.

- ***lokálně stejnoměrná konv.*** - $f \rightrightarrows^{loc} f$ na M, pokud $\forall x \in M\, \exists \delta > 0$, t.ž. $f_n \rightrightarrows f$ na $M \cap \mathcal{U}(x,\delta)$. ($f_n \rightrightarrows^{loc} f$ na $(a,b) \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$ pro $\forall [c,d] \subset (a,b)$.

Posloupnosti

- V1: (ekviv. formulace stejnoměr. konvergence) - jsou dány $\{f_n\}_{n\geq 1}$, f na $M \subset \mathbf{R}$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na M $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in M}|f_n(x) - f(x)|) = 0$. (z def.)

- V2: (Moore-Osgood) f_n, $f : M \to \mathbf{R}$,$x_0 \in \mathbf{R}^*$, $\mathcal{U}(x_0, \delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$. Nechť (i) $f_n \rightrightarrows f$ na M a (ii) $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$. ($a_n$ - vl. lim. pro každé n). Potom ex. vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = B$ a $A = B$, tj. můžu zaměnit pořadí limit: $\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$. posl $\{a_n\}$ konvergentní ($\triangle$ nerovnost f_n, $f_m - f < \frac{\varepsilon}{2}$) $\to$ splňuje Cauchyovu podmínku - ex. vl. limita A. $|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - A|$. ($=: V_1 + V_2 + V_3$). $\frac{\varepsilon}{3}$; $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $V_1, V_3 < \frac{\varepsilon}{3}$ (V_1 ze $\rightrightarrows$, V_3 z ex. vl. lim. A). Pro n ex. δ, t.ž. $\forall x \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$ $V_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ (z (ii)) - proto $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

- důsledek: $f_n, f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{I} \neq \emptyset$ je interval, všechny f_n jsou spojité a $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbf{I}$. Potom i f je spojitá na $\mathbf{I}$. (V2: $x_0 \in \mathbf{I}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ (f_n spojité)$= f(x_0)$.

- L1: $\{g_n\} : M \to \mathbf{R}$. Potom $g_n \rightrightarrows g$ na M (pro nějakou $g : M \to \mathbf{R}$) $\Leftrightarrow$ $\{g_n\}$ je stejnoměrně Cauchyovská ($\forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 : \forall m, n \geq n_0, \forall x \in M : |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon$. (důkaz viz později)

- V3: (záměna limity a derivace) Nechť $f_n : (a, b) \to \mathbf{R}$ mají všechny vl. derivaci na (a, b), ex. $x_0 \in (a, b)$, t.ž. $\{f_n(x_0)\}_{n\geq 1}$ konverguje, $f_n' \rightrightarrows^{loc} g$ na (a, b) pro nějakou g. Potom $\exists f : (a, b) \to \mathbf{R}$ t.ž. $f_n \rightrightarrows^{loc} f$ na (a, b) a $f'(x) = g(x)$ na (a, b) - mohu zaměňovat limitování a derivování. $f_n(x_0)$ konv. $\Rightarrow$ cauchyovská, $f'(x)$ taky (z L1). Ukažme, že $\{f_n(x)\}$ je stejnoměrně cauchyovská na $[c, d] \subset (a, b)$: $\triangle$ nerovnost - $f_n(x) - f_m(x)$ oboje rozepsat jako $f_n(x) - f_n(x_0)$, $h(x) := f_n(x) - f_m(x)$, Lagreangova věta o stř. hodnotě, $\xi \in (x, x_0)$: $- = |(f_n'(\xi) - f_m'(\xi))(x - x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$ (což je $< \varepsilon$)$\leq |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|$ (vždy $< \varepsilon$)$\cdot(d - c) + \varepsilon$ $(x, x_0 \in (c, d)) \leq ((d - c) + 1)\varepsilon$, tedy $\exists f$. Potom $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ =(V2) $= \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$ (z předpokl.)

- V4: (záměna limity a integrování) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), každá $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$ (má Newtonův integrál). Pak i $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a $\lim_{n\to\infty}(N)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. - důkaz doplnit (z V3)

- V5: (Dimiho) Nechť $f_n \to f$ na $[a, b]$, monotónně (tj. $f_1 \leq f_2 \leq ...$ nebo opačně), f_n i f jsou spojité. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. (bez důkazu)

- V6: (Weierstrassova) Nechť $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je spojitá. Pak existuje posloupnost polynomů $\{P_n\}_{n\geq 1}$, t.ž. $P_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. ($\forall\varepsilon\, \exists P(x)$, t.ž. pro $\forall x \in [a, b]$ je $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$. (bez důkazu)

- pozn.: BÚNO $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ spojitá (vždy jde přeškálovat). $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1 - x)^{n-k}$ - Bernsteinovy polynomy, $B_n(f, x) \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$.

Řady

- $f_n : M \to \mathbf{R}$, $n = 0, 1, 2...$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje na M bodově/lok. stejnoměrně/stejnoměrně k funkci f - znamená, že posloupnost $\{f_0 + f_1 + ... + f_n\}_{n\geq 1}$ konverguje k f.

- V7: (Weierstrassovo kritérium) $f_n : M \to \mathbf{R}$, $s_n \geq 0$, $s_n = \sup_M |f_n|$. Pokud $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ konverguje, pak i $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M. ukázat, že $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ splňuje na M stejnoměrnou B-C podmínku: $n_0 \leq m \leq n : |f_m(x) + ... + f_n(x)| \leq (\triangle)|f_m(x)| + ... + |f_n(x)| \leq s_m + s_{m+1} + ... + s_n$. Platí $\forall x \in M$. Protože $\sum s_n$ konverguje, mohu pro $\forall\varepsilon > 0$ vzít n_0, t.ž. $s_m + ... + s_n < \varepsilon$, a tedy $|f_m(x) + ... + f_n(x) \leq \varepsilon\, \forall x \in M$.

- V8: (Záměna pořadí sumace a derivace) $f_n : (a, b) \to \mathbf{R}$, f_n mají na (a, b) vlastní derivace, ex. $x_0 \in (a, b)$, t.ž. $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ konverguje && $\sum_{n=0}^{\infty} f_n' \rightrightarrows^{loc} g$ na (a, b) pro nějakou g. Pak ex. $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, t.ž. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows^{loc} f$ na (a, b)a $f' = g$ na (a, b) - tj. $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$. (aplikace V3 na posl. část. součtů).

- V9: (Záměna pořadí sumace a integrace) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), $f_n \in \mathcal{N}((a, b))$ pro každé $n = 0, 1, 2....$ Pak i $f \in \mathcal{N}((a, b))$ a $(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$. (aplikace V4 na posl. část. součtů).

- V10: (Abel) $f_n, g_n \to \mathbf{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, $\{g_n\}_{n\geq 0}$ je stejnoměrně omezená na M, $\forall x \in M : \{g_n(x)\}$ je monotónní. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na M. def. $t_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_n(x)$. Potom $f_i g_i = -t_i(g_i - g_{i+1}) + t_{i-1}g_i - t_i g_{i+1}$, $\sum$, $\triangle$, $|\sum_{i=m}^{n} f_i g_i| \leq \sum_{i=m}^{n}|t_i||g_i - g_{i+1}|$ (kde z $f_n \rightrightarrows$je $|t_i| \leq \varepsilon$, pro pevná x monotónní - $\sum_{i=m}^{n}|g_i - g_{i+1}| = |g_{n+1} - g_m|$, což je $\leq 2K$) $+|t_{m-1}||g_m| + |t_n||g_{n+1}|$ (celkem $\leq 2\varepsilon K$).

- V11: (Dirichlet) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ má na M stejnoměrně omezené částečné součty, $g_n \rightrightarrows \equiv 0$, $\forall x \in M : \{g_n(x)\}$ je monotónní. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na M.

4 Mocninné řady

- ***mocninná řada*** - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $a_n, x_0 \in \mathbf{R}$. a_n- koeficienty mocninné řady, x_0 - střed mocninné řady.
- mocninná řada vždy konverguje ve svém středu
- V1: (O poloměru konvergence) Nechť$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, pak $\exists! R \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$, t.ž. pro $|x-x_0| < R \sum a_n(x-x_0)$ konverguje absolutně, pro $|x-x_0| > R \sum a_n(x-x_0)$ diverguje. Číslo R je ***poloměr konvergence*** dané mocninné řady.
- V2: (Vzorec pro poloměr konvergence) $\sum a_n(x-x_0)^n$ mocninná řada. Pak $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$, kde užíváme konvence $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$. (i) $0 < R < \infty$ - Cauchyovo odm. kritérium: $\limsup_{n\to\infty} |a_n(x-x_0)^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|x-x_0|}{R}$.(&<> 1). (ii) $R = \infty \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$. (ii) $R = 0 \to \forall c > 0$ je $|a_n| > c^n$ pro ∞n. ($\limsup = \infty$) - vezmu $c > |x-x_0|$, řada diverguje (spor s nutnou podm. konvergence) $a_n|x-x_0| > c_n|x-x_0| > 1$.
- V3: (O lok. stejnoměrné konvergenci mocninné řady) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, poloměr konvergence $R > 0$. Potom $\sum a_n(x-x_0)^n \rightrightarrows^{loc}$ na $(x_0 - R, x_0 + R)$; na $\mathbf{R}$, pokud $R = \infty$. $K \in (0, R)$. $s_n := \sup_{[x_0-K, x_0+K]} |a_n(x-x_0)^n| = |a_n|K^n$. $\sum s_n$ konverguje podle Cauchyho $\sqrt{\ }$ kritéria. - $\limsup_{n\to\infty} \sup |s_n^{\frac{1}{n}}| = \frac{K}{R} < 1$. Podle Weierstrasse máme $\sum a_n(x-x_0)^n \rightrightarrows [x_0 - K, x_0 + K]$.
- V4: (Derivace mocninné řady) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má $R \in (0,\infty]$. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$ má také poloměr konvergence R a na $(x_0 - R, x_0 + R)$ máme $(\sum a_n(x-x_0)^n)' = \sum n \cdot a_n(x-x_0)^{n-1}$. podle vzorce spočíst R pro derivovanou řadu -$\limsup |n \cdot a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim n^{\frac{1}{n}} \cdot \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = R$, pak V4.3 - předp. proV3.8 - OK.
- V5: (Primitivní funkce k mocninné řadě) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má $R \in (0,\infty]$. Pak na $(x_0 - R, x_0 + R)$ máme $\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + c$. plyne z předch. věty (zderivovat $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + c$).
- V6: (Abelova) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konv. $R \in (0,\infty)$ a $\sum a_n R^n$ konverguje. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x\to(x_0+R)-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. BÚNO pro $x_0 = 0$. $\sum a_n x^n = \sum a_n R^n \cdot (\frac{x}{R})^n$ - Abel (V3.10), předpoklady: (i) $f_n(a_n R^n) \rightrightarrows$ (nez. na x) na $[0, R]$ (řada konst. fcí), (ii) $\{g_n\}$ omezená: $|(\frac{x}{R})^n| < 1$ na $[0, R)$, (iii) $\{g_n\}$ je bodově monotónní: $(\frac{x}{R})^n$, $x \geq 0$ OK. Potom Moore-Osgood: $\lim_{x\to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. (konvergence $\sum a_n R^n$ může být i neabsolutní).
- použití - kombinatorická enumerace, počet rozkladů čísla n, počet řešení rovnice $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

5 Fourierovy řady

- $\mathcal{P}_{2\pi}$- ***třída*** 2π ***- periodických funkcí, trigonometrická řada:*** $f(x) =^? \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$- součet vždy funkce $\in \mathcal{P}_{2\pi}$(pokud existuje); jakákoliv fce jde upravit na 2π- periodickou.
- V: $m, n \in \mathbf{N}_0$, pak $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \mathrm{d}x = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx =$(0 pro $m \neq n$, π pro $m = n$). - z ortogonální báze & skal. součinu, nebo $2\times$ per partes & $I = \frac{n^2}{m^2} I$ - $I = 0$ pro $n \neq m$. Jinak z $\int \cos^2 nx \mathrm{d}x = \int \sin^2 nx \mathrm{d}x$. $\sin \times \cos$ podobně (pro $m = n$ - $-I = I$).
- koeficienty: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x$. (pokud trig. řada $\rightrightarrows f$) - dosadit $\int f(x)\mathrm{d}x = a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int \cos nx \mathrm{d}x + b_n \int \sin nx \mathrm{d}x)$ - &vynásobit 1(pro a_0), $\cos Nx$(pro a_N), $\sin Nx$(pro b_N).
- ***Fourierovy koeficienty*** - podle vzorců; trigonometrická řada s a_n, b_n podle vzorců - ***trigonometrická řada funkce*** f. (trig. řada nemusí konvergovat k fci f - nemusí konvergovat vůbec), ***skalární součin*** $f, g \in \mathcal{R}((-\pi,\pi))$ $< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ - má všechny vlastnosti sk. souč.
- $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ ***po částech spojitá*** na $[-\pi, \pi]$ - $\exists$ dělení D tak, že f je spojitá na každém (x_{i-1}, x_i) a v každém x_i má vlastní jednostranné limity; $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ ***po částech hladká*** na $[-\pi, \pi]$- ex. dělení D tak, že na každém (x_{i-1}, x_i) má f vlastní derivaci a existují vl. limity $\lim_{x\to x_i+} f'(x)$ a $\lim_{x\to x_i-} f'(x)$ (i limity f v x_i jsou vlastní).
- V1: (Besselova nerovnost) Nechť a_n, b_n jsou Fourierovy koef. fce $f \in \mathcal{P}_{2\pi} \cap \mathcal{R}((-\pi,\pi))$. Pak $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x (= \frac{<f,f>}{\pi})$. ozn. s_n část. součet F-ovy řady. Pak ze skal. souč.: $0 \leq < f - s_n, f - s_n >$, linearita -2 $< f, s_n > - < s_n, s_n > \leq < f, f >$. $< f, s_n > = < s_n, s_n > = \pi(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2))$ (první je vidět - linearita, $< f, \cos kx > = \pi a_k$ apod.), (druhý - upravit na a_k', b_k', rozepsat sk. souč., z linearity, souč. $\sin \times \cos$).
- V2: (Riemannovo-Lebesgneovo lemma) Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi} \cap \mathcal{R}((-\pi,\pi))$. Pak $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Plyne z V1 (předp. že $f \in \mathcal{R}$ - $\frac{<f,f>}{\pi} < \infty$ - řada $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ konverguje - $(a_n^2 + b_n^2) \to 0$.

- $f \in \mathcal{R}((-\pi,\pi))$ pokud je po částech spojitá, nebo po částech hladká - množina bodů nespojitosti musí být konečná.
- L1: $\frac{1}{2}+\cos x+...+\cos nx = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$ (indukcí,$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$), důsledek: $J_n(x) := \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$, $\int_{-\pi}^{0} J_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} J_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. (z $< J_n(x), 1 >$(přes $\cos ix$, $i=n...0$, $1=\cos 0x$).
- V3: (bodová konvergence F-ovy řady) $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$je po částech hladká na $[-\pi,\pi]$, Potom její Fourierova řada konverguje(bodově) k výrazu $f^*(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. ($f(x\pm 0) = \lim_{t\to x\pm} f(t)$).
  $s_n(x)$ - část. součet $= \frac{1}{\pi} < f(t), \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cdot\cos kx+\sin kt\cdot\sin kx) >$, součt. vzorec pro $\cos(t-x)$, $t := u+x$, lemma ... $= \frac{1}{\pi} < f(u+x), J_n(u) >$. $s_n(x)-f^*(x) = \int_{-\pi}^{0}(f(x+u)-f(x-0))\cdot J_n(u)\mathrm{d}u + \int_0^{\pi}(f(x+u)-f(x+0))\cdot J_n(u)\mathrm{d}u$. (důsl. lemmatu); def. $G(u)$ pro $u\in[-\pi,0)$, 0, $(0,\pi]$; $s_n(x)-f^*(x) = \frac{1}{\pi} < G(u), \sin(n+\frac{1}{2})u >$, $G(u)$ po částech spojitá: $\lim_{u\to 0\pm} G(u) = f'_{\pm}(x)$ - vlastní - $G(u)\in\mathcal{R}((-\pi,\pi))$, můžeme použít V2: (součt. vzorec $\sin(a+b)$)$s_n(x)-f^*(x) = \frac{1}{\pi} < G(u)\sin\frac{u}{2}, \cos nu > + \frac{1}{\pi} < G(u)\cos\frac{u}{2}, \sin nu >$, což $\to 0$ pro $n\to\infty$.
- V4: (stejnoměrná konv. F-ovy řady) $f\in\mathcal{P}_{2\pi}$, po částech hladká a navíc spojitá na $\mathbf{R}$. Potom $s_n(x) \rightrightarrows f$ na $\mathbf{R}$. f' dodef. 0, tam kde není; podle V3 řada bodově konverguje. Stejnoměrnost - Weierstrass: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$ =(per partes) $= -\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x := \frac{\beta_n}{n}$. $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\beta_k|}{k} \le$(Cauchy) $\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$ (Besselova $\le$ pro koef. fce f'; převr. hodnoty čtverce) $\le\infty$. $|\sup_{[-\pi,\pi]}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)| \le |a_n|+|b_n|$ - konv. stejnoměrně.
- V5: (V4 pro nespojité) f po částech hladká, potom $s_n(x)\rightrightarrows f$ na každém $[a,b]$, kde je f spojitá. (bez důkazu), podobně jako 4.
- f sudá - $b_n = 0\,\forall n$ (sin lichá); f lichá - $a_n = 0\,\forall n$. Zvl. případy - zajímavé řady.

6 Metrické prostory

- ***metrický prostor*** - dvojice (M,ρ), kde M je množina, ρ je fce: $\rho: M\times M\to[0,\infty]$, splňuje: $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$; $\rho(x,y)=\rho(y,x)$; $\triangle$nerovnost.
- příklady metrik:
  - eukleidovská na $\mathbf{R}^n$: $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$
  - l_1- metrika: $\mathbf{R}^n$: $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$
  - maximová $(l-\infty)$ metrika: $\rho(x,y) = \max\{|x_i-y_i|; i=1,2,..,n\}$
  - supremová metrika na $\mathcal{C}([a,b])$ (stačí omezené fce) - $\rho(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)|; x\in[a,b]\}$
  - integrální metrika - $M=\mathcal{C}([a,b])$, $\rho(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$
  - diskrétní metrika $\rho(x,y)$ =(0 ... $x=y$), (∞ jinak)
  - Gaussova rovina $\rho(z_1,z_2) = |z_1-z_2|$
- ***otevřená koule*** - $B(x,r) = \{y\in M: \rho(x,y) < r\}$ **,** ***uzavřená koule*** $\overline{B}(x,r) = \{y\in M: \rho(x,y)\le r\}$
- podmn. metrického prostoru A je ***otevřená*** - $\forall x\in A: \exists r>0: B(x,r)\in A$. ***uzavřená*** množina - doplňek otevřené. (uz./ot. závisí na metrice)
- V1: (vlastnosti ot. množin) (M,ρ): potom (i) $\emptyset, M$ otevř. množiny (ii) G_i (konečně mnoho) otevřené - $\cap_{i=1}^{n}G_i$ je taky otevřená (iii) G_α, $\alpha\in I$ otevřené (lib. počet) - $\cup_{\alpha\in I}G_\alpha$ je otevřená. (ii) x z průniku, pro min. průniků r_i tam ot. koule $B(x,r_{min})$ patří. (iii) x ze sjednocení - $\exists\beta$, t.ž. $x\in G_\beta$- $B(x,r)\subset G_\beta\subset\cup G_\alpha$.
- V2: (vlastnosti uzavř. množin) (M,ρ) : (i) $\emptyset, M$ uzavř. množiny (ii) F_i uzavř. (konečný počet). pak $\cup_{i=1}^{n}F_i$ je uzavřená. (iii) F_α, $\alpha\in I$ uzavř. množiny - $\cap_{\alpha\in I}F_\alpha$ uzavřená. (ii) $M\backslash\cup_{i=1}^{n}F_i = \cap_{i=1}^{n}(M\backslash F_i)$ (DeMorgan) (iii) podobně
- ***uzávěr množiny*** $A\subset M$, kde (M,ρ) je metrický prostor, je $\overline{A} = \cap\{F\subset M, F\,\text{uzavřená}, A\subset F\}$(nejmenší uzavřená mn., obsahující A), ***vnitřek množiny*** A: $\mathrm{Int}(A) = \cup\{G\subset M, G\,\text{otevřená}, G\subset A\}$ (největší otevřená mn., obsažená v A).
- V3: (vlastnosti uzávěru množiny) (M,ρ): (i) $\overline{\emptyset}=\emptyset$, $\overline{M}=M$ (ii) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ (iii) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{(A\cup B)}$ (iv) $\overline{A}=\{x\in M: \rho(x,A)=0\}$, kde $\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,y), y\in A\}$ (v) $A\subset B: \overline{A}\subset\overline{B}$. **(i)** z def., **(ii)** jasné, **(v)** $S_B=\{F\subset M, B\subset F, F\,\text{uzavřená}\}$, S_A podobně, $x\in S_B\Rightarrow x\in S_A$, tj. $S_B\subset S_A\to\cap S_A\subset\cap S_B$. **(iii)** $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$ z (v), $A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$, což je uzavř. mn. - $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$ **(iv)** $B := \{x\in M: \rho(x,A)=0\}$, je uzavřená (pro $y\in M\backslash B$ $\rho(y,A)=d>0$), vezmu $0<r<d$, $B(y,r)\cap A=\emptyset$i $B(y,r)\cap B=\emptyset$ podle $\triangle$ner., $B\subset\overline{A}$ (jinak by ex. $y\in B\backslash\overline{A}$ - to by ale ex. $r>0$, t.ž. $B(y,r)\cap\overline{A}=\emptyset$ - $\rho(y,A)\ge r$ - nelze. $A\subset B\subset\overline{A}$,navíc B uzavřená, z toho $B=\overline{A}$.